ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α) Δίνεται τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, X_3, X_4 \sim N(0,1)$

Αν $Y_1 = \dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{(X_1-X_2)^2}}$, $Y_2 = \dfrac{2X_3^2}{X_1^2+X_2^2}$ και $Y_3 = X_4 - \bar{X}$

i) Να βρεθούν οι σταθερές c_1, c_2, έτσι ώστε:

$P(Y_1 \leq c_1) = 0.95$ και $P(Y_2 \geq c_2) = 0.95$

ii) Να υπολογιστεί η $P(Y_3 \geq \sqrt{3})$

β) Έστω τυχαίο δείγμα μεγέθους $n=48$ από την κατανομή $f_X(x) = 2(1-2|x|)$, $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. Να υπολογιστεί κατά προσέγγιση η πιθανότητα περ/ρες από 30 μετρήσεις να βρίσκονται στο διάστημα $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$

ΛΥΣΗ

α) $$Y_1 = \frac{X_1+X_2}{\sqrt{(X_1-X_2)^2}} = \frac{\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{(X_1-X_2)^2}}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{(X_1-X_2)^2}{2}}} \quad (1)$$

$$\left.\begin{matrix} X_1 \sim N(0,1) \\ X_2 \sim N(0,1) \end{matrix}\right\} X_1+X_2 \sim N(0,2) \Rightarrow \frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$$

και $X_1 - X_2 \sim N(0,2) \Rightarrow \dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim N^2(0,1) \Rightarrow \frac{(X_1-X_2)^2}{2} \sim N^2(0,1) = X_1^2$$

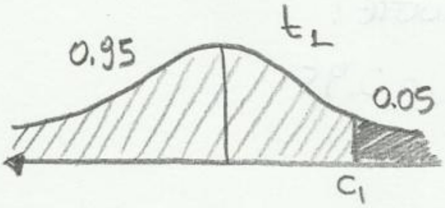
Άρα, (1): $$Y_1 \sim \frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi_1^2}{1}}} = t_1$$

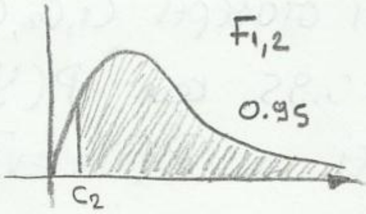
$$Y_2 = \frac{2X_3^2}{X_1^2+X_2^2} = \frac{X_3^2}{\frac{X_1^2+X_2^2}{2}} \sim \frac{\chi_1^2/1}{\chi_2^2/2} = F_{1,2}$$

$$y_3 = X_4 - \bar{X} \ \frac{\text{οχι}}{\text{ανεξ}}\ X_4 - \frac{1}{4}(X_1+X_2+X_3+X_4) = \frac{3}{4}X_1 + \frac{1}{4}(X_1+X_2+X_3) \sim$$

$$\sim N\left(0, \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 3\right) = N\left(0, \frac{12}{16}\right) = N\left(0, \frac{3}{4}\right).$$

i) $P(t_1 \le c_1) = 0.95 \Leftrightarrow P(t_1 \ge c_1) = 0.05 \Rightarrow c_1 = 6{,}314$

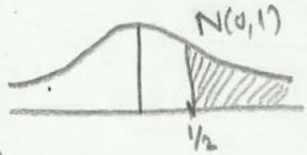




$$P(F_{1,2} \ge c_2) = 0.95 \Leftrightarrow P(F_{1,2} \le c_2) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(\frac{1}{F_{2,1}} \le c_2\right) = 0.05$$

$$\Leftrightarrow P\left(F_{2,1} \ge \frac{1}{c_2}\right) = 0.05 \Leftrightarrow \frac{1}{c_2} = 199 \Leftrightarrow c_2 = \frac{1}{199}$$

ii) $P(y_3 \ge \sqrt{3}) = P\left(\frac{y_3 - 0}{\sqrt{3/4}} \ge \frac{\sqrt{3} - 0}{\sqrt{3/4}}\right) = P(Z \ge 2) =$



$= 1 - P(Z \le 2) =$

$= 1 - P(-\infty < Z \le 0) - P(0 \le Z \le 2) =$

$= 0{,}5 - 0{,}4772 = 0{,}0228$

β) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{αλλού} \\ 2(1-2x), & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 2(1+2x), & -\frac{1}{2} < x \le 0 \end{cases}$

Έστω X τ.μ που παριστά το πλήθος των μετρήσεων που ανήκουν στο $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

Θεωρούμε επιτυχία $E = \{x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]\}$. Πρόκειται για διωνυμική κατανομή με 48 δοκιμές Bernoulli. Άρα, $X \sim B(n=48, p=P(E))$

$$F_X(x) = \begin{cases} x \le -\frac{1}{2}, & F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0 \\ -\frac{1}{2} < x \le 0, & F_X(x) = \underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{-1/2} f_X(t)\,dt}}_{0} + \int_{-1/2}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-1/2}^{x} 2(1+2t)\,dt = 2x^2 + 2x + \frac{1}{2} \\ 0 < x < \frac{1}{2}, & F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1/2} f_X(t)\,dt}_{0} + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f_X(t)\,dt + \int_{0}^{x} f_X(t)\,dt = \\ & = [2t + 2t^2]_{-1/2}^{0} + \int_0^x 2(1-2t)\,dt = 1 - \frac{1}{2} + [2t - 2t^2]_0^x = -2x^2 + 2x + \frac{1}{2} \\ x \ge \frac{1}{2}, & F_X(x) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1 \end{cases}$$

Τουτέστιν,

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & x\le -\frac{1}{2} \\ 2x^2+2x+\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}<x\le 0 \\ -2x^2+2x+\frac{1}{2}, & 0<x<\frac{1}{2} \\ 1, & x\ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$P(E)=P\left(-\frac{1}{4}\le x\le \frac{1}{4}\right)=F_X\left(\frac{1}{4}\right)-F_X\left(-\frac{1}{4}\right)=$$

$$=-2\cdot\frac{1}{16}+2\cdot\frac{1}{4}+\cancel{\frac{1}{2}}-2\cdot\frac{1}{16}+2\cdot\frac{1}{4}-\cancel{\frac{1}{2}}=$$

$$=-4\cdot\frac{1}{16}+4\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4},\quad X\sim B\left(48,\frac{3}{4}\right)$$

Προσεγγιστικά μέσω της κανονικής κατανομής $X\sim N(\mu_x,\sigma_x^2)=$

$$N(n\cdot p, npq)=N\left(48\cdot\frac{3}{4}, 48\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)=N(36,9)$$

Άρα, μέσω της διόρθωσης συνέχειας:

$$P(x>30)=P(x>29.5)=P\left(\frac{x-36}{3}>\frac{29.5-36}{3}\right)=$$

$$=P\left(Z>\frac{6.5}{3}\right)=P\left(Z>\frac{65}{30}\right)=P(Z>2.16)=$$

$$=1-P(Z\le 2.16)=0.5-P(0<Z\le 2{,}16)=$$

$$=0.5-0{,}4846=0{,}0154.$$

ΘΕΜΑ 2

Δύο μηχανές M_1 και M_2 αυτομάτου συσκευασίας έχουν ρυθμιστεί έτσι ώστε να γεμίζουν πακέτα βάρους 11gr. Υπάρχουν υπόνοιες ότι οι δύο μηχανές δεν λειτουργούν ομοιόμορφα ως προς το βάρος του περιεχομένου. Για το λόγο αυτό λαμβάνονται 9 πακέτα από τη μηχανή 1 (M_1) με βάρη: 10, 12, 11, 16, 10, 11, 13, 10, 15 και 9 πακέτα από τη μηχανή 2 (M_2) με βάρη: 11, 10, 7, 8, 9, 12, 8, 7, 9. Αν υποθέσουμε ότι τα βάρη είναι ανεξάρτητες κανονικές τυχαίες μεταβλητές με μέσες τιμές μ_1 και μ_2 και διασπορές $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, τότε:

i) Να ελεγχθεί η υπόθεση ότι οι δύο μηχανές λειτουργούν ομοιόμορφα σε επίπεδο σημαντικότητας $a=0.05$

ii) Να βρεθεί η ισχύς του τεστ όταν το μέσο βάρος των πακέτων από τη M_1 είναι κατά 2gr μεγαλύτερο από το μέσο βάρος της M_2.

ΛΥΣΗ

i) $H_0: \mu_1-\mu_2=0$ v $H_a: \mu_1-\mu_2\neq 0$

$n_1, n_2<30$ με άγνωστες αλλά ίσες διασπορές

Επιλέγαμε το στατιστικό:

$$t=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \underset{\text{αληθ.}}{\overset{H_0}{\sim}} t_{n_1+n_2-2}, \quad S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$\bar{X}_1=\frac{108}{9}=12 \quad \text{και} \quad \bar{X}_2=\frac{81}{9}=9$$

Έπειτα, υπολογίζαμε:

j	X_{ij}^2 όπου $j=1,2$									ΣΥΝΟΛΟ
$j=1$	100	144	121	256	100	121	169	100	225	1326
$j=2$	121	100	49	64	81	144	64	49	81	753

$$\sum_{i=1}^{9}(X_{i1}-\bar{X}_1)^2=\sum X_{i1}^2-\frac{(\sum X_{i1})^2}{n_1}=1362-\frac{108^2}{9}=1362-1296=66.$$

$$\sum_{i=1}^{9}(X_{i2}-\bar{X}_2)^2=\sum X_{i2}^2-\frac{(\sum X_{i2})^2}{n_2}=753-\frac{81^2}{9}=753-729=24.$$

Άρα, $S_p^2 = \frac{66+24}{17} = \frac{90}{17} = 5,2941$

$S_p = \sqrt{5,2941} = 2,3$

Συνεπώς, $t = \frac{3-0}{2,3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{1,084} = 1,6629$

Κρ. περιοχή: $|t| \geq t_{7,0.025} = 2,365$

όπου $1,6629 < 2,365 \Rightarrow H_0$ δεν απορ. σε επιπεδ. σημαντ. $\alpha = 0.05$

ii) Αναζητούμε την ισχύ $\gamma = 1-\beta$

$\beta = P(\text{Δεκτή } H_0 \,/\, H_a \text{ Αληθής}) = P(|t| \leq t_{7,0.025} \,/\, \mu_1-\mu_2=2) =$

$= P(-2,365 \leq t \leq 2,365 \,/\, \mu_1-\mu_2=2) =$

$= P\left(-2,365 \leq \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \leq 2,365 \,\middle/\, \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_7\right) =$

$= P\left(-2,365 - \frac{2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \leq t_7 \leq 2,365 - \frac{2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right) =$

$= P\left(-2,365 - \frac{2}{1,084} \leq t_7 \leq 2,365 - \frac{2}{1,084}\right) =$

$= P(-2,365 - 1,1086 \leq t_7 \leq 2,365 - 1,1086) =$

$= P(-3,4736 \leq t_7 \leq 1,2564) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1-\beta = P(t_7 < -3,4736) + P(t_7 > 1,2564) \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta = 1 - P(t_7 < -3,4736) - P(t_7 > 1,2564) \Rightarrow$

$\underset{\text{συμμετρ}}{\Rightarrow} \beta = 1 - P(t_7 > 3,4736) - P(t_7 > 1,2564)$

ΘΕΜΑ 3

α) Να βρεθούν οι εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων των παραμέτρων b_0 και b_1 του γραμμικού μοντέλου:

$$y_i = b_0 + b_1(x_i - \bar{x}) + \varepsilon_i \,, \quad i=1,\dots,n$$

β) Σε 6 ομάδες των 20 ποντικιών παρατηρήθηκαν οι παρακάτω θάνατοι (Y) όταν τους δόθηκαν δόσεις (X) κάποιου δηλητηρίου (σε mgr)

Δοση X:	3	2	3	7	5	4
Θανατοι Y:	4	5	4	9	7	7

Υιοθετώντας το απλό γραμμικό μοντέλο, ελέγξτε την υπόθεση ότι $b_1=0$ ($\alpha=0.01$) και να εκτιμήσετε τον αριθμό των ποντικιών που θα ψοφήσουν αν σε ομάδα 20 ποντικιών δοθεί μια δόση 6 mgr από το ίδιο δηλητήριο. Τι ποσοστό μεταβλητότητας της Y οφείλεται στην παλινδρόμηση; Να υπολογιστεί ο συντελεστής συσχέτισης $r(x,y)$ Pearson

ΛΥΣΗ

α) $y_i = b_0 + b_1(x_i-\bar{x}) + \varepsilon_i \Rightarrow \varepsilon_i = y_i - b_0 - b_1(x_i-\bar{x})$

Έστω συνάρτηση:

$$Q(b_0,b_1) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - b_0 - b_1(x_i-\bar{x})\right)^2$$

Με τη βοήθεια ελαχίστων τετραγώνων, οι εκτιμητές των b_0 και b_1 είναι αντίστοιχα εκείνες οι τιμές $\hat{b}_0$ και $\hat{b}_1$ που ελαχιστοποιούν τη συνάρτηση $Q(b_0,b_1)$

$$\frac{\partial Q(b_0,b_1)}{\partial b_0} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - b_0 - b_1(x_i-\bar{x})\right).$$

$$\frac{\partial Q(b_0,b_1)}{\partial b_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} \left[\left(y_i - b_0 - b_1(x_i-\bar{x})\right)\cdot(x_i-\bar{x})\right]$$

Αν $\frac{\partial Q(b_0,b_1)}{\partial b_0} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i = n\hat{b}_0 + \hat{b}_1\big(\underbrace{\cancel{\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i - n\cdot\bar{x}}}_{\to 0}\big) \Rightarrow \boxed{\hat{b}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \bar{y}}$

Αν $\frac{\partial Q(b_0,b_1)}{\partial b_1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i\bar{x} + \hat{b}_0\big(\underbrace{\cancel{\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x}}}_{\to 0}\big) + \hat{b}_1 \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \frac{\sum x_i \sum y_i}{n} + \hat{b}_1 \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \Rightarrow \boxed{\hat{b}_1 = \frac{\sum (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}$$

β.

y_i^2	x_i^2	x_iy_i	$\hat{y}_i$
16	9	12	5
25	4	10	4
16	9	12	5
81	49	63	9
49	25	35	7
49	16	28	6
ΣΥΝΟΛΟ 236	112	160	36

$$\hat{b}_1 = \frac{\Sigma x_i y_i - \frac{\Sigma x_i \Sigma y_i}{6}}{\Sigma x_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{6}} = \frac{160 - \frac{24 \cdot 36}{6}}{112 - \frac{24^2}{6}} =$$

$$= \frac{160-144}{112-96} = \frac{16}{16} = 1$$

και $\hat{b}_0 = \bar{Y} - \hat{b}_1 \bar{X} = \frac{\Sigma y_i}{6} - \frac{\Sigma x_i}{6} = 6-4=2$

Άρα, $\hat{y}_i = 2 + x_i, \; i=1,\dots,6$

$$SS_{tot} = \Sigma(y_i - \bar{y})^2 = \Sigma y_i^2 - \frac{(\Sigma y_i)^2}{6} = 236 - 6 \cdot 36 = 236 - 216 = 20$$

$$SS_{reg} = \Sigma(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = 2(5-6)^2 + (4-6)^2 + (9-6)^2 + (7-6)^2 + \cancel{(6-6)^2} =$$

$$= 2+4+9+1 = 16.$$

Άρα, $SS_{res} = SS_{tot} - SS_{reg} = 20 - 16 = 4$.

$MS_{reg} = \frac{SS_{reg}}{1} = 16$ και $MS_{res} = \frac{SS_{res}}{4} = \frac{4}{4} = 1$

ANOVA

ΠΡΟΕΛ. ΜΕΤΑΒΛ.	Β.Ε	Αθρ. τετρ.	Μέσα τετρ.
ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ	1	16	16
ΥΠΟΛΟΙΠΟ	4	4	1
ΣΥΝΟΛΟ	5	20	

$$F = \frac{MS_{reg}}{MS_{res}} = \frac{16}{1} = 16.$$

$F_{1,4,0.01} = 21.2$

Αφού, $F < F_{1,4,0.01}$ τότε η υπόθεση H_0: δεν απορρίπτεται και συνεπώς $b_1 = 0$ και άρα δεν υπάρχει γραμμική εξάρτηση μεταξύ των Χ και Υ μεταβλητών. Έπειτα, αναζητούμε την τιμή $\hat{Y}_0$ όταν $X_0 = 6$, $\hat{Y}_0 = 2 + X_0 = 2 + 6 = 8$. Άρα, σε μια ομάδα των 20 ποντικιών θα φωλιάσουν 8 ποντίκια αν τους δοθεί 6 mgr δηλητήριο.

$R^2 = \frac{SS_{reg}}{SS_{tot}} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \rightarrow$ {Ένα 80% μεταβλητότητας της Υ οφείλεται στην παλινδρόμηση

Αφού, γενικώς $r^2(x,y) = R^2 \Rightarrow r(x,y) = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$, $-1 \le r(x,y) \le 1$

ΘΕΜΑ 4

α) Για το μοντέλο της Ανάλυσης Διακύμανσης κατά ένα παράγοντα να βρεθεί η αναμενόμενη τιμή: $E(MSres)$.

β) Τα παρακάτω δεδομένα μας δίνουν τους αριθμούς λαθών όπου έκαναν σε 5 διαδοχικές βδομάδες τρεις τεχνικοί (T_1, T_2, T_3) που εργάζονται σε ένα εργαστήριο βιοχημείας:

T_1: 7 9 7 8 9
T_2: 6 7 5 5 7
T_3: 5 6 4 4 6

Να εξεταστεί αν υπάρχει σημαντική διαφορά στην απόδοση των τριών τεχνικών και ειδικότερα μεταξύ των T_1, T_3 $(a=0.05)$

ΛΥΣΗ

α) $$MSres = \frac{SSres}{n-r} = \frac{1}{n-r}\sum_i^{n_j}\sum_j^{r}(Y_{ij}-\bar{Y}_{.j})^2 = \frac{1}{n-r}\sum_j^{r}(n_j-1)\frac{1}{n_j-1}\sum_i^{n_j}(Y_{ij}-\bar{Y}_{.j})^2$$

$$= \frac{1}{n-r}\sum_j^{r}(n_j-1)S_j^2.$$

Άρα, $$E(MSres) = E\left(\frac{1}{n-r}\sum_j^{r}(n_j-1)S_j^2\right) = \frac{1}{n-r}\sum_j^{r}(n_j-1)\cdot E(S_j^2) =$$

$$= \frac{1}{n-r}\sum_j^{r}(n_j-1)\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\cancel{n-r}}\cancel{(n-r)} = \sigma^2$$

β)

	ΤΕΧΝΙΚΟΙ (j)			
ΒΔΟΜΑΔΕΣ (i)	T_1	T_2	T_3	ΣΥΝΟΛΟ
1	7	6	5	—
2	9	7	6	—
3	7	5	4	—
4	8	5	4	—
5	9	7	6	—
ΣΥΝΟΛΟ	40	30	25	95
Αριθμ. Μέσοι	8	6	5	19
Αρ. Βδομαδ.	5	5	5	15

$\hat{\mu}_j = \bar{Y}_{.j}$, $j=1,2,3$

$\hat{\mu}_1 = \bar{Y}_{.1} = 8$

$\hat{\mu}_2 = \bar{Y}_{.2} = 6$

$\hat{\mu}_3 = \bar{Y}_{.3} = 5$

Οι συντελεστές ελαχ. τετραγ

ANOVA

ΠΡΟΕΛ.ΜΕΤΑΒ	Β.Ε	SS	MS
ΔΟΚΙΜΕΣ	$r-1$	SStre	$SStre/r-1$
ΥΠΟΛΟΙΠΟ	$n-r$	SSres	$SSres/n-r$
ΣΥΝΟΛΟ	$n-1$	SStot	—

y_{ij}^2	T_1	T_2	T_3	ΣΥΝΟΛΟ
1	49	36	25	
2	81	49	36	
3	49	25	16	
4	64	25	16	
5	81	49	36	
ΣΥΝΟΛΟ	324	184	129	637

$$SS_{tot} = \sum_i^5 \sum_j^3 (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_i^5 \sum_j^3 y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{15} = 637 - 601{,}6 = 35{,}3.$$

$$SS_{tre} = \sum_j^3 \frac{y_{.j}^2}{n_j} + \frac{y_{..}^2}{n} = \frac{40^2}{5} + \frac{30^2}{5} + \frac{25^2}{5} - 601{,}6 =$$

$$= 320 + 180 + 125 - 601{,}6 = 23{,}4$$

$$SS_{res} = SS_{tot} - SS_{tre} = 35{,}3 - 23{,}4 = 11{,}9$$

$$MS_{tre} = \frac{SS_{tre}}{r-1} = \frac{23{,}4}{2} = 11{,}7$$

$$MS_{res} = \frac{SS_{res}}{n-r} = \frac{11.9}{15-3} = \frac{11.9}{12} = 0.99$$

$$F = \frac{MS_{tre}}{MS_{res}} = \frac{11.7}{0.99} = 11.81 > F_{0.05,2,12} = 6{,}93$$

Άρα, αν $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ v $H_a: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$ τότε η H_0 απορρίπτεται στο επίπεδο σημαντικότητας 5%

Συγκεκριμένα, για τους T_1 και T_3 τεχνικούς παίρνουμε το στατιστικό: ($H_0': \mu_1 - \mu_3 = 0$ v $H_a': \mu_1 - \mu_3 \neq 0$)

$$A = \frac{\bar{Y}_{.1} - \bar{Y}_{.3}}{\sqrt{MS_{res}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3}\right)}} \overset{H_0'}{\underset{\text{αληθ}}{\sim}} t_{n-r}.$$

Έτσι, είναι: $A = \dfrac{8-5}{\sqrt{0.99 \cdot \frac{2}{5}}} =$

$$= \frac{3}{\sqrt{0{,}99 \cdot 0{,}4}} = 7{,}575.$$

Αλλά, $t_{\frac{a}{2}, n-r} = t_{0.025,12} = 2{,}179 < 7{,}575 = A$

Άρα, η $H_0': \mu_1 - \mu_3 = 0$ Απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 5%